09.03.16

Εφαρμογή 1.7.5 / σελ. 37 : Έστω $A$ τυχόν μη κενό και φραγμένο υποσύνολο ενός μ.χ. $(E,\rho)$ και $x_0$ τυχόν στοιχείο του $E$. Θεωρούμε έναν θετικό αριθμό $r$ τέτοιον ώστε $r > \rho(x_0, A) + \delta(A)$. Τότε ισχύει $A \subseteq B(x_0, r)$

Λύση

Για τυχόν $x_0 \in E$ και $(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists z \in A) : \rho(x_0, z) < \rho(x_0, A) + \frac{1}{\nu}$ $(*)$

διότι αν αυτό δεν ίσχυε

$$(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A)\ \rho(x_0, z) \geq \underbrace{\rho(x_0, A) + \frac{1}{\nu_0}}_{\text{κάτω φράγμα}}$$

$$\inf_{z \in A} \rho(x_0, z) \geq \rho(x_0, A) + \frac{1}{\nu_0}$$

$$\Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \rho(x_0, A) + \frac{1}{\nu_0}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \frac{1}{\nu_0}$$

$$\Rightarrow \nu_0 < 0 \quad \lightning$$

Έστω $x \in A$.

$$\rho(x,x_0) \le \rho(\overset{\in A}{x},\overset{\in A}{z}) + \rho(z,x_0) \overset{(*)}{<} \delta(A) + \rho(x_0,A) + \frac{1}{\nu}, \ \forall \nu\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \rho(x,x_0) \le \delta(A)+\rho(x_0,A) \underset{\text{από υπόθεση}}{<} r$$

$$\Rightarrow \rho(x,x_0) < r \Rightarrow x\in B(x_0,r)$$

Άσκηση 10 / σελ. 413: Ας είναι $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σ' ένα μ.χ. $E$ και $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σεου $E$ τέτοια ώστε

$$\rho(a_\nu,b_\nu) < \frac{1}{\nu}, \ \nu\in\mathbb{N}$$

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Λύση

$\forall \nu,\mu\in\mathbb{N}$

$$\rho(b_\nu,b_\mu) \le \rho(b_\nu,a_\nu)+\rho(a_\nu,a_\mu)+\rho(a_\mu,b_\mu) \underset{\text{από υπόθεση}}{<} \frac{1}{\nu}+\rho(a_\nu,a_\mu)+\frac{1}{\mu}$$

Από υπόθεση, $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική

$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists \nu_1\in\mathbb{N})(\forall \nu,\mu\in\mathbb{N}) \ \substack{\nu>\nu_1\\ \mu>\nu_1} \Rightarrow \rho(a_\nu,a_\mu)<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{1}{\nu}\to 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists \nu_2\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N}) \ \nu>\nu_2 \Rightarrow \frac{1}{\nu}<\frac{\varepsilon}{3}$$

για να ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο ορισμοί, ορίζουμε $\nu_0=\max\{\nu_1,\nu_2\}$

$$\forall \nu,\mu>\nu_0 \longrightarrow \begin{cases} \rho(a_\nu,a_\mu)<\frac{\varepsilon}{3} \\ \frac{1}{\nu}<\frac{\varepsilon}{3} \\ \frac{1}{\mu}<\frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

άρα

$$\rho(b_\nu, b_\mu) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική

Άσκηση 1 / σελ. 429: Ας είναι $(E,\rho)$ μ.χ., $(\mathbb{R}, |\,|)$ ο ευκλείδιος μ.χ., $f: E\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση στο $a\in E$ με $f(a)>0$. Να αποδειχθεί ότι $\exists\delta>0$ τέτοιο ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\in B(a,\delta)$

Λύση

στον ορισμό ήταν $\rho_1$

$f$ συνεχής στο $a \Rightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in E)\ \rho(x,a)<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

αφού ξέρουμε ποια είναι η μετρική δε βάζουμε $\rho_2$

$\rho(x,a)<\delta \Rightarrow x\in B(a,\delta)$

Ο ορισμός ισχύει $\forall\varepsilon>0$, επιλέγω $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ ($f(a)>0$ από υπόθεση)

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{f(a)}{2} < f(x)-f(a) < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)>0 \text{ από υπόθεση} \\ \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)>0$$

B' ΤΡΟΠΟΣ: $\to$ αυτόν έχει στο βιβλίο

$f$ συνεχής στο $a \Rightarrow \forall U(f(a))\ \exists V(a): f(V(a)) \subset U(f(a))$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Θεωρούμε το διάστημα } \left(\frac{f(a)}{2}, \frac{3f(a)}{2}\right) = B\left(f(a), \frac{f(a)}{2}\right) \\ f \text{ συνεχής στο } a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \delta>0 \quad f(B(0,\delta)) \subseteq B\left(f(0), \frac{f(0)}{2}\right), \quad (1)$$

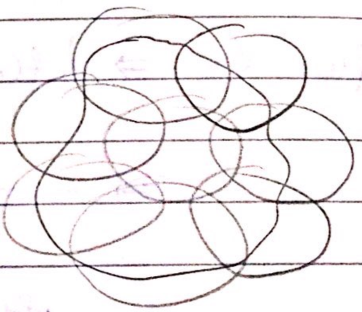
$$x \in B(0,\delta) \Rightarrow f(x) \in f\left(B(0,\delta)\right)$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} f(x) \in B\left(f(0), \frac{f(0)}{2}\right) = \left(\frac{f(0)}{2}, \frac{3f(0)}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(x) \in \left(\dfrac{f(0)}{2}, \dfrac{3f(0)}{2}\right) \\ f(0)>0 \text{ από υπόθεση} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

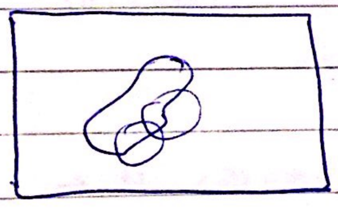
$$\Rightarrow f(x) > 0$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> $(E,\rho)$ <u>συμπαγής</u> <u>αν-ν</u> κάθε ανοιχτό κάλυμμα έχει πεπερασμένα υποκαλύμματα.



$C$ κάλυμμα του $E \Longleftrightarrow E = \bigcup_{i\in I} B_i$

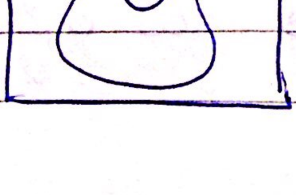
$C = \{B_i\}_{i\in I}$, $B_i \subseteq E$



E

Αν κάθε $B_i$ είναι ανοιχτό, θα λέμε $\{B_i\}_{i\in I}$ <u>ανοιχτό κάλυμμα</u>.

$$\left.\begin{array}{l} E = \bigcup_{i\in I} B_i \\ \{B_i\}_{i\in I} \text{ κάλυμμα του } E \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n\in \mathbb{N}, \ i_1, i_2, \dots, i_n \in I \quad E = B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_n}$$

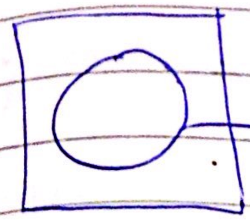


Η συμπάγεια είναι ισχυρή έννοια.

$(E,\rho)$ , $S \subseteq E$

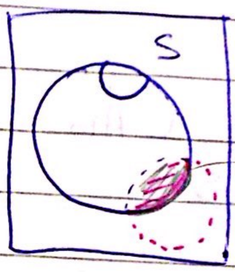
**ΟΡΙΣΜΟΣ** $S$ συμπαγές υποσύνολο του $E$ $\Leftrightarrow$ $(S, \rho_S)$ συμπαγής

$\Leftrightarrow$ κάθε ανοιχτό κάλυμμα στο $S$ έχει πεπερ. υποκαλύμματα




$S \subseteq (E,\rho)$

$A \subseteq S$ ανοιχτό στο $S$ $\Leftrightarrow$ $A = B \cap S$, $B \subseteq E$ ανοιχτό στο $E$




δηλ. αν το επεκτείνει ~~παίρνει λίγο μπάλα~~

$\Leftrightarrow$ $\forall (A_i)_{i \in I}$ οικογένεια $\subseteq S$, $A_i$ ανοιχτό στο $S$ ώστε $\bigcup_{i \in I} A_i = S$

$\Rightarrow \exists\, i_1, i_2, \ldots, i_n : S = \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}$

$\Leftrightarrow$ ~~και αυτό είναι ισοδύναμο με το παρακάτω θεώρημα~~

~~[illegible]~~ $\forall (B_i)_{i \in I}$ ανοιχτά στο $E$, $S \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ (1)

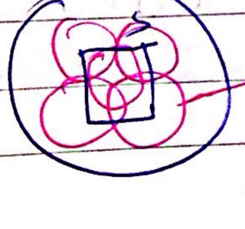
$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I : S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k}$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Υπόθεση $(S, \rho_S)$ συμπαγής.

Θα πάρουμε $(B_i)_{i \in I}$ κάλυμμα του $S$, ανοιχτό στο $E$
($B_i \subseteq E$ ανοιχτό)

$S \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$




ανοιχτά στο E

Θεωρούμε $A_i = B_i \cap S$ , $\forall i \in I$

ώστε να μπορέσουμε να πάρουμε ανοιχτό στο $S$

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$$

άρα

$$S = \bigcup A_i$$

$(S, \rho_S)$ συμπαγή $\Longrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in I : S = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$

$A_i$ ανοιχτά στο $S$

Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} S = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \\ A_i = B_i \cap S \end{array}\right\} \Rightarrow S \subseteq B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_n}$

$(\Longleftarrow)$

Έστω ότι ισχύει το ①. Θ.δ.ο. $(S, \rho_S)$ συμπαγής.

Θεωρούμε ένα ανοιχτό κάλυμμα στο $S$: $(A_i)_{i \in I}$ : $S = \bigcup_{i \in I} A_i$

Θ.δ.ο. υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. (με τη βοήθεια του ①)

$\forall i \; \exists B_i : A_i = B_i \cap S$ , $B_i$ ανοιχτό στο $E$

άρα θα έχουμε $S = \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$

$$\overset{①}{\Longrightarrow} S \subseteq B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_n}$$

$$\Longrightarrow S = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$$

Άσκηση: $(E, \rho)$

$(x_n)_n \subseteq E$ , $x_n \to x$

$S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

$x_n \to x$ , δηλ.

$\forall U$ ανοιχτό : $x \in U$

$\exists n_0(U) : x_n \in U \;\; \forall n \geq n_0$

Ν.δ.ο. $S$ συμπαγές $\subseteq E$.

## Λύση

Έστω τυχαίο $(B_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του $S$.

$S \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ , $B_i$ ανοιχτό υποσύνολο του $E$.

$\exists$; πεπερασμένο υποκάλυμμα

Θέλουμε δηλ. ένα συνολάκι αυτού του καλύμματος που να περιέχει όλους τους όρους της ακολουθίας


$x_1 \in S \Rightarrow \exists B_{i_1} : x_1 \in B_{i_1}$

$\exists i_0 \in I : x \in B_{i_0} \Rightarrow \exists n_0 , \forall n \geq n_0 , x_i \in B_{i_0}$

$x_1 \in S \subseteq \cup B_i \Rightarrow \exists i_1 \in I : x_1 \in B_{i_1}$

$x_2 \in S \subseteq \cup B_i \Rightarrow \exists i_2 \in I : x_2 \in B_{i_2}$

$\vdots$

$x_{n_0-1} \in S \subseteq \cup B_i \Rightarrow \exists i_{n_0-1} \in I : x_{n_0-1} \in B_{i_{n_0-1}}$

$x_n \in B_{i_0} , \forall n \geq n_0$

Συμπαγές $\Rightarrow$ Κλειστό και φραγμένο (ολ. φραγμ.)
$\not\Leftarrow$

**ΘΕΩΡΗΜΑ** Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
1) $(E,\rho)$ συμπαγής
2) $(E,\rho)$ ακολουθιακά συμπαγής
3) $(E,\rho)$ πλήρης και ολικά φραγμ.

Απόδειξη

1) $\Rightarrow$ 2)

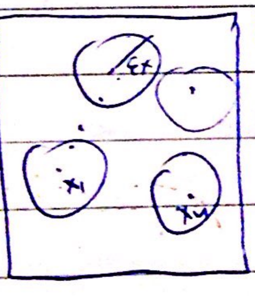
Έστω $(E,\rho)$ συμπαγής με $(x_n)_n \subseteq E$.
Θ.δ.ο. $\exists (x_{k_n})$ υπακολουθία, $\exists x \in E : x_{k_n} \to x$ (1)

Έστω ότι δεν ισχύει το (1)
Άρα, $\forall x \Rightarrow$ το $x$ δεν είναι υπακολουθιακό όριο της $(x_n)_n$

$\exists U(x) = B(x, \varepsilon_x) : x_n \notin B(x, \varepsilon_x)$ τελικά $\forall n$

Δηλ. μπορούμε να γράψουμε $|\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon_x)\}| < +\infty$
έχει πληθικό αριθμό

Η οικογένεια $\{B(x, \varepsilon_x)\}_{x \in E}$ είναι ~~κάθε~~ ανοιχτό κάλυμμα του $E$




$\left( \text{δηλ.} \quad E = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon_x) \right)$

$\Rightarrow \exists$ πεπερ. υποκ.

Δηλ. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in E$
$E = B(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon_{x_n})$

$\lightning$

**ΛΗΜΜΑ Lebesgue** $(E,\rho)$ ακολουθιακά συμπαγής, $(B_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα $\Rightarrow \begin{cases} \exists\, \delta>0 \text{ (αριθμός lebesgue)} \\ \forall x\in E,\ \exists\, i\in I : B(x,\delta)\subseteq B_i \end{cases}$

**Απόδειξη**: 2) $\Rightarrow$ 1)

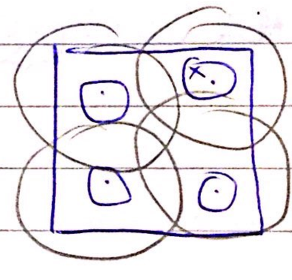
$(E,\rho)$ ακολ. συμπαγής. Θ.δ.ο. $(E,\rho)$ συμπαγής

Έστω $(B_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του E.

Θ.δ.ο. $\exists$ πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Άρα $\overset{\text{από ΛΗΜΜΑ}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \delta>0,\ \forall x\in E,\ \exists\, i\in I : B(x,\delta)\subseteq B_i$

$\{B(x,\delta)\}_{x\in I}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του E.



$$\xrightarrow[\text{συμπαγ. + ολ. φραγμ.}]{\text{ακολ.}} \exists\, x_1, x_2, \dots, x_n \in E : E = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\delta) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k} \subseteq E$$

$$\Longrightarrow E = \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k}$$

$\exists\, i_k : B(x_k,\delta)\subseteq B_{i_k}$

Είχαμε δει:
$(E, \rho)$
$x_n \xrightarrow{\rho} x$

A/W

$S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ συμπαγές
Ν.δ.ο. είναι ακολουθιακά συμπαγές (άρα συμπαγές)

**ΠΡΟΤΑΣΗ** $(E, \rho)$ μ.χ., $A \subseteq E$ συμπαγές $\Rightarrow$ $\begin{cases} A \text{ κλειστό και} \\ \text{φραγμένο.} \end{cases}$

[Σημ. $\overline{A} = A$, $A \subseteq B(x, M)$]

Απόδειξη
Αφού ολικά φραγμένο, άρα φραγμένο

$(x_n)_n \subseteq A$ : $x_n \to x$ $\Rightarrow$ $x_{k_n} \to x$
ΘΔΟ $x \in A$

$\exists\, x_{k_n} \to y \in A$
$\exists\, y \in A$

$\Rightarrow \boxed{x = y \in A}$

άρα κλειστό.

Παρατήρηση: A κλειστό και φραγμένο $\not\Rightarrow$ A συμπαγές (μπορεί και να ισχύει).